Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Administración y Economía
Departamento de Economía

Ayudantía #1

Repaso Matemático

1) Repaso acerca de la función de producción Cobb-Douglas, $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, donde $0 < \alpha < 1$:

a) Tipo de rendimiento a escala
R: Retornos constantes a escala.

$$\begin{aligned} F(zK, zL) &= A(zK)^{\alpha}(zL)^{1-\alpha} \\ F(zK, zL) &= Az^{\alpha}K^{\alpha}z^{1-\alpha}L^{1-\alpha} \\ F(zK, zL) &= Az^{\alpha+1-\alpha}K^{\alpha}L^{1-\alpha} \\ F(zK, zL) &= zAK^{\alpha}L^{1-\alpha} \\ F(zK, zL) &= zY \end{aligned}$$

b) Productividad marginal del capital y del trabajo
R: Productividades marginales positivas.

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial K} &= \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} > 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial L} &= (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha} > 0 \end{aligned}$$

c) Tipo de crecimiento del trabajo y del capital

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} &= \alpha(\alpha-1)AK^{\alpha-2}L^{1-\alpha} < 0 \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} &= (1-\alpha)(-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha-1} < 0 \end{aligned}$$

d) Pagos a los factores

$$\begin{aligned} PmgK &= r \\ \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} &= r \\ \alpha AK^{\alpha-1}\frac{K}{K}L^{1-\alpha} &= r \\ \frac{\alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha}}{K} &= r \\ \alpha Y &= rK \end{aligned}$$

El pago que recibe el capital r es proporcional a su grado α

$$
\begin{aligned}
PmgL &= w \\
(1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha} &= r \\
\alpha AK^{\alpha}L^{-\alpha}\frac{L}{L} &= r \\
\frac{(1-\alpha)AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha}}{L} &= r \\
(1-\alpha)Y &= rL
\end{aligned}
$$

El pago que recibe el trabajo w es proporcional a su grado $(1-\alpha)$

Modelo de crecimiento

2) Modelo de Solow y Swan:

   a) Supuestos del modelo
      - Función de producción con rendimientos constantes a escala
      - $Poblacion = Trabajo = L$, crece a tasa constante $n = \frac{\triangle L}{L}$
      - Tasa de ahorro constante (γ), $0 < \gamma < 1$. Y se ahorra $S = \gamma Y$
      - Depreciación a una tasa constante (δ), $0 < \gamma < 1$. Y se deprecia $D = \delta K$

   b) Desarrolle detalladamente la ley de acumulación del capital

$$
\begin{aligned}
\triangle K &= I - D \\
\triangle K &= \gamma Y - \delta K
\end{aligned}
$$

   c) Encuentre la ecuación fundamental de crecimiento
   Sabemos que podemos expresar las variables en términos per cápita. Esto nos servirá para simplificar la notación. $y = \frac{Y}{L}$ y $k = \frac{K}{L}$.

$$
\begin{aligned}
\triangle K &= I - D \\
\triangle K &= \gamma Y - \delta K \\
\frac{\triangle K}{L} &= \frac{\gamma Y}{L} - \frac{\delta K}{L} \\
\frac{\triangle K}{L} &= \gamma y - \delta k \qquad (1)
\end{aligned}
$$

   Ahora desarrollamos y luego de aplicar logarítmos diferenciamos con respecto al tiempo. Asumiremos $n = 0$:

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{K}{L} \\
\ln(k) &= \ln(K) - \ln(L) \\
\frac{\triangle k}{k} &= \frac{\triangle K}{K} - \frac{\triangle L}{L} \\
\frac{\triangle k}{k} &= \frac{\triangle K}{K} - 0 \\
\triangle k &= k\frac{\triangle K}{K} \\
\triangle k &= \frac{K}{L}\frac{\triangle K}{K} \\
\triangle k &= \frac{\triangle K}{L} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Por último reemplazamos (2) en (1):

$$\triangle k = \gamma y - \delta k$$

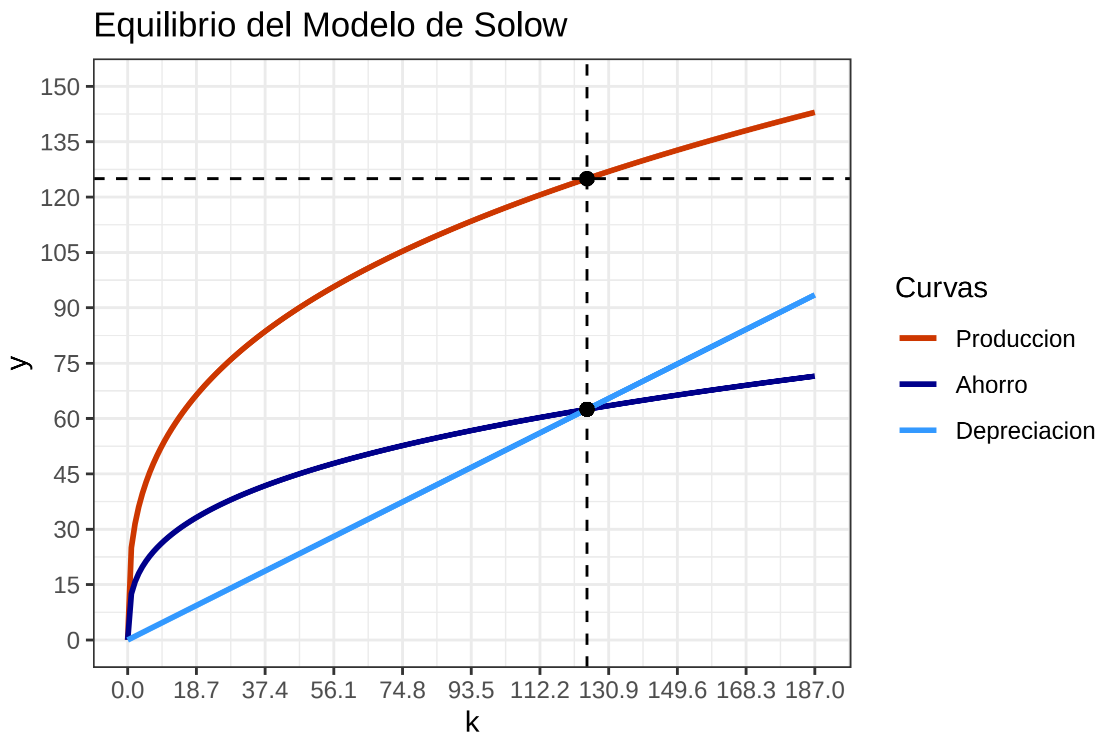
d) Encuentre el capital de estado estacionario por trabajador
Sabemos que en el EE la $\triangle k = 0$:

$$
\begin{aligned}
0 &= \gamma y - \delta k \\
\delta k &= \gamma y \\
\delta k &= \gamma A k^{\alpha} \\
\frac{k}{k^{\alpha}} &= \frac{A\gamma}{\delta} \\
k^{1-\alpha} &= \frac{A\gamma}{\delta} \\
k_{ee} &= \left(\frac{A\gamma}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

e) Encuentre el producto de estado estacionario por trabajador

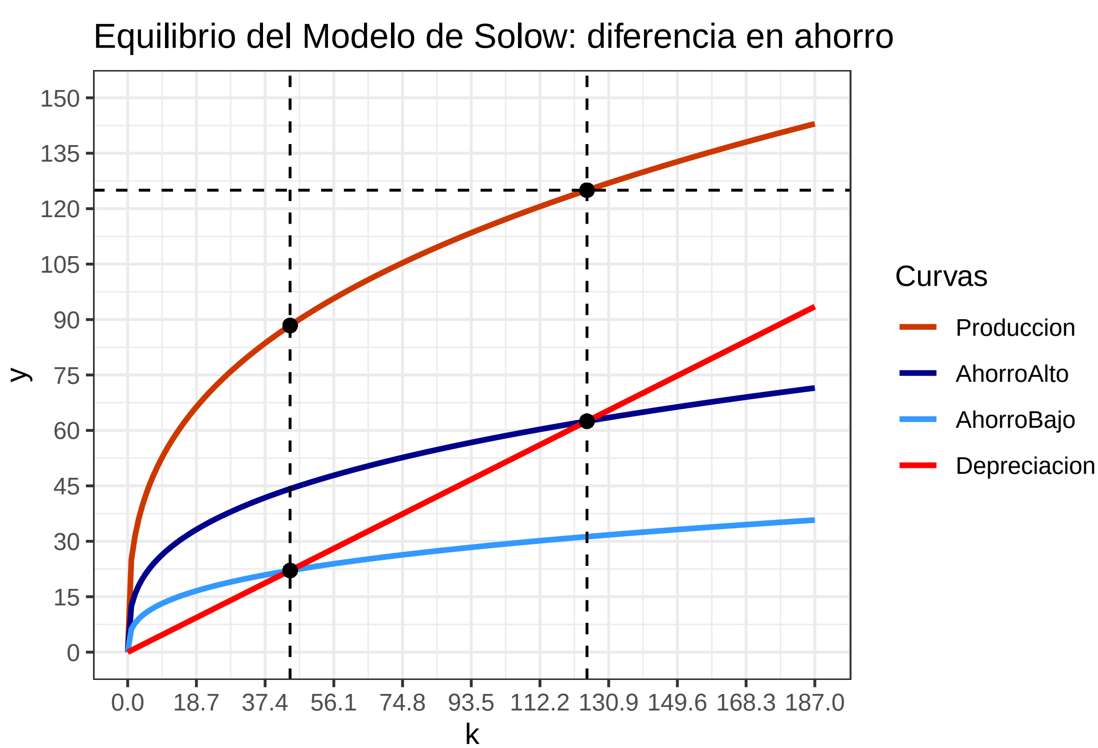
$$
\begin{aligned}
y_{ee} &= A k_{ee}^{\alpha} \\
y_{ee} &= A\left(\frac{A\gamma}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\
y_{ee} &= A A^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\
y_{ee} &= A^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

f) Grafique y explique la dinámica hacia el EE
Respuesta: Solo será gráfica ya que la dinámica hacia el EE fue explicada en detalle en la clase.

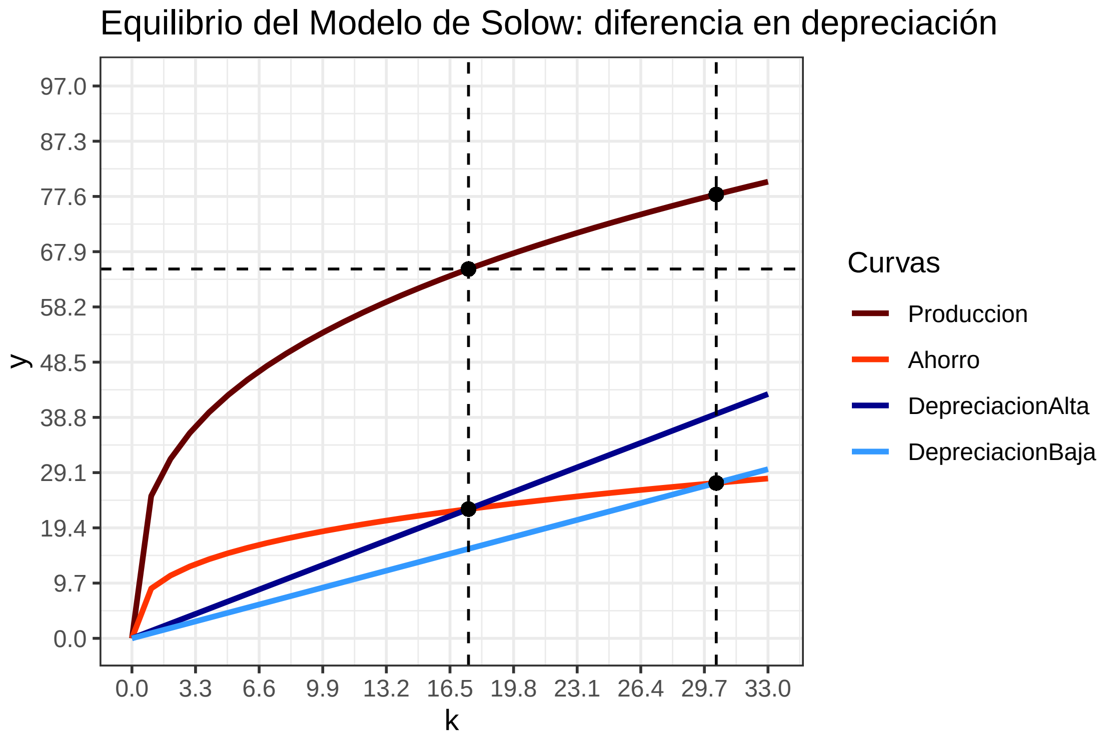


g) ¿Qué sucede con el EE si aumenta γ?, ¿y si aumenta δ?

Respuesta: Un aumento en γ, genera un aumento del ahorro a niveles per cápita (p/c). Por otro lado, considerando que la depreciación sigue sin variar, podemos concluir que existe un crecimiento del capital per cápita. Este crecimiento genera que le economía crezca hasta alcanzar el nuevo EE, donde, el capital y el producto p/c se encuentran en niveles mayores.



Una aumento de δ, genera un aumento de la depreciación a niveles p/c. Por otro lado, considerando que el ahorro no varía podemos concluir existe una ”destrucción”del capital p/c. Este pérdida de capital genera que le economía decrezca hasta alcanzar el nuevo EE, donde, el capital y el producto p/c se encuentran en niveles menores.



Aplicación

3) Suponga que existen 2 países, uno ahorrador (a) y otro gastador que ahorra poco (g). Asuma que ambos países son idéntico en los demás parámetros.

   a) construya un ratio que le permita diferenciar la producción entre ambos países
   País a:

$$k_a^{ee} = \left(\frac{A * \gamma_a}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$y_a^{ee} = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\gamma_a}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

   País b:

$$k_b^{ee} = \left(\frac{A * \gamma_b}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$y_b^{ee} = A^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\gamma_b}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

   Ratio:

$$\frac{y_a^{ee}}{y_b^{ee}} = \frac{A^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\gamma_a}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{A^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\gamma_b}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} = \frac{\left(\frac{\gamma_a}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{\left(\frac{\gamma_a}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} = \left(\frac{\gamma_a}{\gamma_b}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

b) Considere $\gamma_a = 0{,}25$, $\gamma_b = 0{,}05$ y $\alpha = \frac{1}{3}$. Explique su resultado.

$$\frac{y_a^{ee}}{y_b^{ee}} = \left(\frac{\gamma_a}{\gamma_b}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\frac{y_a^{ee}}{y_b^{ee}} = \left(\frac{0{,}25}{0{,}05}\right)^{\frac{1/3}{1-1/3}}$$

$$\frac{y_a^{ee}}{y_b^{ee}} = \left(\frac{0{,}25}{0{,}05}\right)^{\frac{1/3}{2/3}}$$

$$\frac{y_a^{ee}}{y_b^{ee}} = 5^{\frac{3}{6}}$$

$$\frac{y_a^{ee}}{y_b^{ee}} \approx 2{,}23$$