Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Administración y Economía
Departamento de Economía

Guía de Ejercicios n^o 3 - Teoría del Productor
Unidad temática: Teoría del Productor

Esta solución solo es una referencia de las posibles respuestas. Los gráficos detallados se demostrarán en detalle en clases y/o ayudantias.

Factores Productivos, Producto Medio y Producto Marginal

3.1) ¿Cuáles son las propiedades de las funciones de producción?
Respuesta:

- No se puede producir sin nada. Básicamente si no hay input de entrada, no se puede generar output de salida. Recordar $f(0) = 0$.
- Las funciones de producción son creciente en el uso de fatores. Esto quiere decir que la Productividad Marginal debe cumplir $Pmg \geq 0$.
- Se consideran funciones de producción cóncavas para justificar los rendimientos decrecientes a escala. Cabe mencionar que pueden existir funciones convexas.

3.2) Estudie la productividad de la siguiente función de producción: $F(K, L) = AK^{1/2}L^{1/2}$.
Respuesta: para estudiar su productividad debemos observar su primera y segunda derivada parcial de cada uno de los factores.

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \frac{1}{2}AK^{-1/2}L^{1/2} > 0$$

$$\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} = -\frac{1}{4}AK^{-3/2}L^{1/2} < 0$$

La primera derivada con respecto al capital es positiva, lo que indica que la función posee rendimientos positivos con respecto al capital. En cuanto a la segunda derivada notamos que es negativa, por lo que, la función posee rendimientos decrecientes con respecto al capital. Conclusión, rendimientos positivos y decrecientes al capital.

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = \frac{1}{2}AK^{1/2}L^{-1/2} > 0$$

$$\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} = -\frac{1}{4}AK^{1/2}L^{-3/2} < 0$$

La primera derivada con respecto al trabajo es positiva, lo que indica que la función posee rendimientos positivos con respecto al trabajo. En cuanto a la segunda derivada notamos que es negativa, por lo que, la función posee rendimientos decrecientes con respecto al trabajo. Conclusión, rendimientos positivos y decrecientes al trabajo.

3.3) Suponga que una firma posee la siguiente función de producción: $Q = F(K, L) = 4KL + 4L^2 - 4L^3$. Sabemos los siguientes datos $K_0 = 3$. Encuentre la función de Producto Marginal (Pmg) y Producto Medio (Pme) de la firma y grafique.
Respuesta: Primero debemos reemplazar el valor de capital, ya que, en corto plazo las unidades de capital son fijas. Por lo tanto, la función de producción queda: $Q = F(L) = 12L + 4L^2 - 4L^3$. Ahora podemos derivar las funciones:

Para la función de producto medio debemos dividir la función de producción por la cantidad de trabajo L:

$$Pme_L = \frac{Q}{L} = \frac{12L + 4L^2 - 4L^3}{L}$$
$$Pme_L = \frac{Q}{L} = 12 + 4L - 4L^2$$

Para la función de producto marginal debemos derivar la función de producción con respecto al trabajo L:

$$Pmg_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}(12L + 4L^2 - 4L^3)$$
$$Pmg_L = 12 + 8L - 12L^2$$

Por último para graficar debemos considerar el punto máximo de la función de $PmeL$, por lo que derivaremos parcialmente para encontrar el máximo:

$$\frac{\partial Pme}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}(12 + 4L - 4L^2)$$
$$= 4 - 8L = 0$$
$$L = \frac{1}{2}$$

Tasa Técnica de Sustitución (TTS)

3.4) Considere la siguiente función de producción ($Q = 2K^2L$) y grafique su mapa de isocuantas.
Respuesta:

Para graficar las isocuantas, debemos considerar el hecho de que estamos en largo plazo, debido a ello ambos factores de producción pueden variar. Para derivar una función que las represente, debemos definir un nivel fijo de producción, llamémoslo $\overline{Q}$ y despejemos el factor de producción K.

$$\overline{Q} = 2K^2L$$
$$K^2 = \frac{\overline{Q}}{2L}$$
$$K = \sqrt{\frac{\overline{Q}}{4L}}$$

Ahora, debemos dar valores de producción para luego graficar. Notemos que a medida que consideramos mayores niveles de producción la isocuanta se encuentra más lejos del origen. Por último es bueno destacar que cuando L tiende a cero, K tiende a infinito y cuando L tiende a infinito K tiende a cero.

3.5) Encuentre la TTS para las siguientes funciones de producción e interprete:

- $Q(K,L) = 2KL^2$
Respuesta:
$$TTS = \frac{2K}{L}$$

- $Q(K,L) = K^{1/2}L^{1/2}$
Respuesta:
$$TTS = \frac{K}{L}$$

- $Q(K,L) = K^{\phi}L^{\mu}$
Respuesta:
$$TTS = \frac{\mu K}{\phi L}$$

- $Q(K,L) = 10K + 5L$
Respuesta:
$$TTS = \frac{5}{10}$$

Corto plazo y Largo Plazo

3.6) Grafique de manera aproximada las siguientes funciones de producción. Además, interprete y de un ejemplo que pueda ajustarse a estas funciones:

a) $Q(L) = \sqrt{2L}$
b) $Q(L) = K^{0.3}L^{0.7}$
c) $Q(L) = 10L$
d) $Q(K,L) = L^2 + 1$

Retornos a escala

3.7) Estudie los rendimientos a escala de las siguientes funciones de producción:

- $F(K,L) = K^3 + L^3$
Respuesta: Como el grado de λ es 2, la función posee rendimientos crecientes a escala.

$$F(\lambda K, \lambda L) = (\lambda K)^3 + (\lambda L)^3$$
$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^3 K^3 + \lambda^3 L^3$$
$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^3 (K^3 + L^3)$$

- $F(K,L) = K^{0.2}L^{0.8}$
Respuesta: Como el grado de λ es 1, la función posee rendimientos constantes a escala.

$$F(\lambda K, \lambda L) = (\lambda K)^{0.2}(\lambda L)^{0.8}$$
$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{0.2}K^{0.2}\lambda^{0.8}L^{0.8}$$
$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{1}(K^{0.2}L^{0.8})$$

- $F(K,L) = K^{\alpha}L^{\beta}$
Respuesta: Como el grado de λ depende α y β existen 3 posibilidades. Si $\alpha+\beta < 1$ la función tendrá retornos decrecientes a escala. Si $\alpha + \beta = 1$ la función de producción tendrá retornos constantes a escala. Por último, si $\alpha+\beta > 1$ la función de producción tendrá retornos crecientes a escala.

$$F(\lambda K, \lambda L) = (\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{\beta}$$
$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\alpha} K^{\alpha} \lambda^{\beta} L^{\beta}$$
$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\alpha+\beta}(K^{\alpha} L^{\beta})$$

Funciones de producción

3.8) Grafique las siguientes funciones de producción y calcule los productos marginales y medios (analice). Además mencione su TTS y explique si es una función de corto o largo plazo:

- $Q(K, L) = 5K + 2L$
  Respuesta: Es una función de producción de Largo plazo, lineal con una $TTS = \frac{2}{5}$; $Pmg_K = 5$; $Pmg_L = 2$
- $Q(K, L) = 10KL$
  Respuesta: Es una función de producción de Largo plazo, del estilo Cobb-Douglas con una $TTS = \frac{K}{L}$; $Pmg_K = 10L$; $Pmg_L = 10K$
- $Q(K, L) = min\{K, 2L\}$
  Respuesta: Es una función de producción de Largo plazo, Leontief. No es derivable por lo cual no posee una TMS, pero conocemos la relación de producción $K = 2L$.

Costos

3.9) Para las siguientes estructuras de costos, obtenga las funciones de Cmg y Cme, luego grafique de manera aproximada las funciones que obtuvo.

- $C = 5q + 2q^2 - 2q^3$
  Respuesta:

$$Cmg = \frac{\partial C}{\partial q} = 5 + 4q - 6q^2$$
$$Cme = \frac{C}{q} = 5 + 2q - 2q^2$$

- $C = \sqrt{q}$
  Respuesta:

$$Cmg = \frac{\partial C}{\partial q} = \frac{1}{2\sqrt{q}}$$
$$Cme = \frac{C}{q} = \frac{1}{\sqrt{q}}$$

- $C = 2q^2 + 3q + 5$
  Respuesta:

$$Cmg = \frac{\partial C}{\partial q} = 4q + 3$$
$$Cme = \frac{C}{q} = 2q + 3 + \frac{5}{q}$$

3.10) ¿Qué es la función de isocostes de una firma?, grafique y exprese su pendiente.
Respuesta:
La recta de isocosto, representa todas aquellas combinaciones de factores de producción (K,L), que suponen un mismo nivel de costo. Su forma es la siguiente:

$$C = wL + rK$$

Donde, w es el salario del trabajo y r es una tasa de utilizar capital.

La pendiente es $-w/r$ y se obtiene de despejar K de la función isocosto:

$$\begin{aligned} C &= wL + rK \\ rK &= C - wL \\ K &= \frac{C}{r} - \frac{w}{r}L \end{aligned}$$

3.11) Considere la función de producción $Q(K, L) = 3KL$ y los siguientes parámetros $K_0 = 4$, $w = 20$ y $r = 2$. Responda lo siguiente:

a) Grafique la función de producción de corto plazo.
Respuesta:
La función de producción queda: $Q = 12L$ y graficamente es una recta que nace del origen y tiene pendiente 12.

b) Estudie los rendimientos a escala de la función.
Respuesta:
Como el exponente del escalar es mayor a 1, concluimos que la función posee rendimientos creciente a escala.

$$\begin{aligned} Q(\lambda K, \lambda L) &= 3(\lambda K)(\lambda L) \\ Q(\lambda K, \lambda L) &= \lambda^2 3KL \end{aligned}$$

c) Estudie las productividades marginales de la función.
Respuesta:
Ambas productividades marginales son positivas con respecto al factor de producción.

$$\begin{aligned} Pmg_K &= \frac{\partial Q}{\partial K} = 3L \\ Pmg_L &= \frac{\partial Q}{\partial K} = 3k \end{aligned}$$

d) Encuentre la función de costos fijos, variables y totales.
Respuesta:
Primero reemplazamos el factor fijo y la función de producción queda:

$$Q = 12L$$

Luego, despejamos L:

$$L = \frac{Q}{12}$$

Luego, reemplazamos L en la función de isocostos de la empresa:

$$\begin{aligned} C &= wL + rK \\ C &= w\frac{Q}{12} + rK \end{aligned}$$

y por último, reemplazamos los valores de w, r y K_0:

$$C = \frac{20Q}{12} + 2 * 4 = \frac{5Q}{3} + 8$$

Notemos que el costo fijo es 8, el costo variable es $\frac{5Q}{3}$ y el costo total es la suma de ambos.

e) Grafique las funciones de costo.
Respuesta:
En un gráfico donde la abscisa es L, y la ordenada se corresponde a los costos el gráfico es: Una constante $CF = 8$, una recta que nace desde el origen $Cv = \frac{5Q}{3}$ y por último la suma de ambos $CT = \frac{5Q}{3} + 8$.

3.12) Considera una función de costos que tiene la forma $C(q) = 2q^2 + 2q + 10$

a) Obtenga la función de Cmg, Cme y Cmev.
Respuesta:

$$Cmg = \frac{\partial C}{\partial q} = 2q + 2$$
$$Cme = \frac{C}{q} = 2q + 2 + \frac{10}{q}$$
$$CmeV = \frac{CV}{q} = 2q + 2$$

b) Grafique las funciones encontradas.
Respuesta:
La función de Cmg es lineal y nace desde $y = 2$ y tiene una pendiente de 2. La función de CmeV también es una lineal que nace de $y = 2$, pero tiene pendiente de 2. Por último, la función de Cme, es tipo U, y se intersecta con la de Cmg en su mínimo.

3.13) Una firma posee la siguiente estructura de costos: $C(q) = 2q^3 - 6q^2 + 3q + 10$.

a) Obtenga la función de Cmg, Cme y Cmev.
Respuesta:

$$Cmg = \frac{\partial C}{\partial q} = 6q^2 - 12q + 3$$
$$Cme = \frac{C}{q} = 2q^2 - 6q + 3 + \frac{10}{q}$$
$$CmeV = \frac{CV}{q} = 2q^2 - 6q + 3$$

Minimización del Costo

3.14) Una firma posee una función de producción $Q = F(K, L) = K^2L$ que posee rendimientos crecientes a escala.

a) Encuentre las demandas condicionadas de factores en función de w,r y Q.
Respuesta:
Lagrangiano:

$$L = wL + rK - \lambda[Q - K^2L]$$

CPO's:

$$
\begin{aligned}
1): \frac{\partial L}{\partial L} &= w + \lambda K^2 = 0 \\
2): \frac{\partial L}{\partial K} &= r + \lambda 2KL = 0 \\
3): \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -Q + KL = 0
\end{aligned}
$$

de 1):

$$\lambda = -\frac{w}{K^2}$$

de 2):

$$\lambda = -\frac{r}{2KL}$$

igualando:

$$
\begin{aligned}
-\frac{w}{K^2} &= -\frac{r}{2KL} \\
2wL &= rK \\
4): K &= \frac{2wL}{r}
\end{aligned}
$$

4) en 3):

$$
\begin{aligned}
-Q + \left(\frac{2wL}{r}\right)^2 L &= 0 \\
\frac{2^2 w^2 L^3}{r^2} &= Q \\
L^3 &= \frac{r^2 Q}{2^2 w^2} \\
L^d &= \left(\frac{r^2 Q}{2^2 w^2}\right)^{1/3} \\
L^d &= \left(\frac{r}{2w}\right)^{2/3} Q^{1/3}
\end{aligned}
$$

L^d en 4):

$$
\begin{aligned}
K^d &= \frac{2w}{r} L^d \\
K^d &= \frac{2w}{r} \left(\frac{r}{2w}\right)^{2/3} Q^{1/3} \\
K^d &= \left(\frac{2w}{r}\right)^{1/3} Q^{1/3}
\end{aligned}
$$

b) Si $w = 8$ y $r = 2$, ¿Cuáles son las cantidades de factores de producción que minimizan el costo?. Considere un nivel de producción de Q=2000. Grafique el equilibrio.
Respuesta:

$$L^* = \left(\frac{2}{2 \cdot 8}\right)^{2/3} 2000^{1/3} = 3.15$$
$$K^* = \left(\frac{2 \cdot 8}{2}\right)^{1/3} 2000^{1/3} = 25.20$$

c) Encuentre la función de costos de largo plazo y luego grafique.
Respuesta:
Reemplazamos las demandas condicionadas en la isocosto:

$$C = 8L + 2K$$
$$C = 8\left(\frac{r}{2w}\right)^{2/3} Q^{1/3} + 2\left(\frac{2w}{r}\right)^{1/3} Q^{1/3}$$
$$C = Q^{1/3}\left[8\left(\frac{r}{2w}\right)^{2/3} + 2\left(\frac{2w}{r}\right)^{1/3}\right]$$
$$C = Q^{1/3}\left[8\left(\frac{2}{2 \cdot 8}\right)^{2/3} + 2\left(\frac{2 \cdot 8}{2}\right)^{1/3}\right]$$
$$C = 6 \cdot Q^{1/3}$$

d) Encuentre la función de Costo marginal y medio de largo plazo. Luego grafique.
Respuesta:

$$Cmg = \frac{\partial C}{\partial Q} = \frac{2}{Q^{2/3}}$$
$$Cme = \frac{C}{Q} = \frac{6}{Q^{2/3}}$$

3.15) Encuentre la función de costo marginal y costo medio para la siguiente función de producción:

$$Q = K^{0.5}L^{0.5}$$

Además, considere $w = 2$ y $r = 4$. Finalmente grafique.
Respuesta:
Lagrangiano:

$$L = 2L + 4K - \lambda[Q - K^{0.5}L^{0.5}]$$

CPO's:

$$1): \frac{\partial L}{\partial L} = 2 - \lambda 0.5K^{0.5}L^{-0.5} = 0$$
$$2): \frac{\partial L}{\partial K} = 4 - \lambda 0.5K^{-0.5}L^{0.5} = 0$$
$$3): \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -Q + K^{0.5}L^{0.5} = 0$$

de 1):

$$\lambda = \frac{2}{0.5K^{0.5}L^{-0.5}}$$

de 2):

$$\lambda = \frac{4}{0.5K^{-0.5}L^{0.5}}$$

igualando:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{0.5K^{0.5}L^{-0.5}} &= \frac{4}{0.5K^{-0.5}L^{0.5}} \\
\frac{2L^{0.5}}{L^{-0.5}} &= \frac{4K^{0.5}}{K^{-0.5}} \\
2L &= 4K \\
4) : \frac{L}{2} &= K
\end{aligned}$$

4) en 3):

$$\begin{aligned}
-Q + \left(\frac{L}{2}\right)^{0.5} L^{0.5} &= 0 \\
\frac{L}{2^{0.5}} &= Q \\
L^d &= \sqrt{2}Q
\end{aligned}$$

L^d en 4):

$$\begin{aligned}
K &= \frac{L^d}{2} \\
K^d &= \frac{\sqrt{2}Q}{2} \\
K^d &= \frac{Q}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Reemplazamos las demandas condicionadas en la isocosto:

$$\begin{aligned}
C &= 2L + 4K \\
C &= 2\left(\sqrt{2}Q\right) + 4\left(\frac{Q}{\sqrt{2}}\right) \\
C &= Q\left[2\sqrt{2} + \frac{4}{\sqrt{2}}\right] \\
C &= Q\left[\frac{8}{\sqrt{2}}\right]
\end{aligned}$$

Por último calculamos las funciones de coste marginal y medio:

$$Cmg = \frac{\partial C}{\partial Q} = \left[\frac{8}{\sqrt{2}}\right]$$

$$Cme = \frac{C}{Q} = \left[\frac{8}{\sqrt{2}}\right]$$