Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Administración y Economía
Departamento de Economía

Ayudantía #7

Equilibrio del productor

Minimización del Costo

1) Una firma posee una función de producción $Q = F(K, L) = K^2L$ que posee rendimientos crecientes a escala. Además $PmgL = K^2$ y $PmgK = 2KL$

   a) Encuentre las demandas condicionadas de factores en función de w,r y Q.
   Respuesta: Conocemos $TTS = \frac{w}{r}$ y que $TTS = \frac{PmgL}{PmgK}$. Entonces simplemente reemplazamos los productos marginales para encontrar la TTS:

$$TTS = \frac{PmgL}{PmgK}$$
$$TTS = \frac{K^2}{2KL}$$
$$TTS = \frac{K}{2L}$$

   Luego encontramos la Senda de Expansión (SE):

$$TTS = \frac{w}{r}$$
$$\frac{K}{2L} = \frac{w}{r}$$
$$K = \frac{2w}{r}L$$

   Ahora, reemplazamos la SE en la función de producción y despejamos L:

$$Q = \left(\frac{2wL}{r}\right)^2 L$$
$$Q = \frac{2^2w^2}{r^2}L^3$$
$$L^3 = \frac{r^2Q}{2^2w^2}$$
$$L^d = \left(\frac{r^2Q}{2^2w^2}\right)^{1/3}$$
$$L^d = \left(\frac{r}{2w}\right)^{2/3} Q^{1/3}$$

   reemplazando L^d en la SE:

$$K^d = \frac{2w}{r} L^d$$
$$K^d = \frac{2w}{r} \left(\frac{r}{2w}\right)^{2/3} Q^{1/3}$$
$$K^d = \left(\frac{2w}{r}\right)^{1/3} Q^{1/3}$$

b) Si $w = 8$ y $r = 2$, ¿Cuáles son las cantidades de factores de producción que minimizan el costo?. Considere un nivel de producción de Q=2000. Grafique el equilibrio.
Respuesta:

$$L^* = \left(\frac{2}{2 \cdot 8}\right)^{2/3} 2000^{1/3} = 3.15$$
$$K^* = \left(\frac{2 \cdot 8}{2}\right)^{1/3} 2000^{1/3} = 25.20$$

c) Encuentre la función de costos de largo plazo y luego grafique.
Respuesta: Reemplazamos las demandas condicionadas en la isocosto:

$$C = 8L + 2K$$
$$C = 8 \left(\frac{r}{2w}\right)^{2/3} Q^{1/3} + 2 \left(\frac{2w}{r}\right)^{1/3} Q^{1/3}$$
$$C = Q^{1/3} \left[8 \left(\frac{r}{2w}\right)^{2/3} + 2 \left(\frac{2w}{r}\right)^{1/3}\right]$$
$$C = Q^{1/3} \left[8 \left(\frac{2}{2 \cdot 8}\right)^{2/3} + 2 \left(\frac{2 \cdot 8}{2}\right)^{1/3}\right]$$
$$C = 6 \cdot Q^{1/3}$$

d) Encuentre la función de Costo marginal y medio de largo plazo. Luego grafique.
Respuesta:

$$Cmg = \frac{\partial C}{\partial Q} = \frac{2}{Q^{2/3}}$$
$$Cme = \frac{C}{Q} = \frac{6}{Q^{2/3}}$$

2) Encuentre la función de costo marginal y costo medio para la siguiente función de producción:

$$Q = K^{0.5} L^{0.5}$$
$$PmgL = 0.5 K^{0.5} L^{-0.5}$$
$$PmgK = 0.5 K^{-0.5} L^{0.5}$$

Además, considere $w = 2$ y $r = 4$. Finalmente grafique.

Respuesta:

Entonces simplemente reemplazamos los productos marginales para encontrar la TTS:

$$\begin{aligned}
TTS &= \frac{PmgL}{PmgK} \\
TTS &= \frac{0.5K^{0.5}L^{-0.5}}{0.5K^{-0.5}L^{0.5}} \\
TTS &= \frac{K}{L}
\end{aligned}$$

Luego encontramos la Senda de Expansión (SE):

$$\begin{aligned}
TTS &= \frac{w}{r} \\
\frac{K}{L} &= \frac{w}{r} \\
K &= \frac{w}{r}L \\
K &= \frac{2}{4}L \\
K &= \frac{L}{2}
\end{aligned}$$

Ahora, reemplazamos la SE en la función de producción y despejamos L:

$$\begin{aligned}
Q &= \left(\frac{L}{2}\right)^{0.5} L^{0.5} \\
\frac{L}{2^{0.5}} &= Q \\
L^d &= \sqrt{2}Q
\end{aligned}$$

Ahora L^d en SE:

$$\begin{aligned}
K &= \frac{L^d}{2} \\
K^d &= \frac{\sqrt{2}Q}{2} \\
K^d &= \frac{Q}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Reemplazamos las demandas condicionadas en la isocosto:

$$\begin{aligned}
C &= 2L + 4K \\
C &= 2\left(\sqrt{2}Q\right) + 4\left(\frac{Q}{\sqrt{2}}\right) \\
C &= Q\left[2\sqrt{2} + \frac{4}{\sqrt{2}}\right] \\
C &= Q\left[\frac{8}{\sqrt{2}}\right]
\end{aligned}$$

Por último calculamos las funciones de coste marginal y medio:

$$
\begin{aligned}
Cmg &= \frac{\partial C}{\partial Q} = \left[\frac{8}{\sqrt{2}}\right] \\
Cme &= \frac{C}{Q} = \left[\frac{8}{\sqrt{2}}\right]
\end{aligned}
$$